"Kritische Drehzahlen gewisser Rotorformen unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung"

INAUGURALDISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

vorgelegt von
Ludwig Fehrle
aus Frankfurt/Main-Höchst

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Frankfurt am Main 1954

- D 30 -

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547420_0074

Kritische Drehzahlen gewisser Rotorformen unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung

Die Auslenkung der im kritischen Zustand rotierenden zweifach kugelig gelagerten Welle mit konstanter Biegesteifigkeit, die ganz oder teilweise mit Scheiben von linear veränderlichem Radius r besetzt ist, wird bei Berücksichtigung der Kreiselwirkung dargestellt durch eine lineare Integrodifferentialgleichung, deren erster Term (mit symmetrischem Kern) den Einfluß der Fliehkräfte, der zweite (mit unsymmetrischem Kern) denjenigen der Kreiselmomente angibt.Durch partielle Integration läßt sich der unsymmetrische Kern eliminieren und somit die Kreiselmomentbelastung auf eine zur Fliehkraftbelastung hinzutretende kontinuierlich verteilte Last und mehrere Einzellasten zurückführen. Es treten auf: kontinuierlich verteilte Lasten in denjenigen Wellenbereichen (Feldern), in denen r nicht identisch Null ist, Einzellasten an den Sprung- und Knickstellen von r (Feldgrenzen).

Das hierzu äquivalente Eigenwertproblem - der Eigenwert ist proportional dem Quadrat der kritischen Drehschnelle - in Form einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung einschließlich der zugehörigen Rand- (in den Lagern) und Übergangsbedingungen (an den Feldgrenzen) folgt aus dem Hamilton-Prinzip, wenn die potentielle Energie mittels der 2.Ableitung der Auslenkungsfunktion dargestellt wird, sowie durch Überlegungen geometrischer Art.

A) Näherungslösung. Die angenäherte Auflösung dieses Eigenwertproblems erfolgt mit einer Verallgemeinerung der von R.Grammel entwickelten Methode vermöge zweier miteinander äquivalenter Iterationsvorschriften: die eine bedient sich der Integrodifferentialgleichung, die zweite der Differentialgleichung samt Rand- und Übergangsbedingungen. Bei beiden Vorschriften wird die

Wellenauslenkung ermittelt, die zu der mit einer linearen Kombination bekannter Funktionen, die alle Randbedingungen erfüllen, gebildeten Belastung gehört. Mit diesen Vorschriften und einer weiteren für die auftretenden Variationen geht man in die aus dem Hamilton-Prinzip folgende und durch partielle Integration umgeformte Variationsgleichung ein, wobei jedes Feld für sich zu berücksichtigen ist. Sinngemäße Übertragung der Grammelschen Methode führt zu einem linearen homogenen Gleichungssystem für die Unbekannten des Näherungsansatzes, dessen verschwindende Koeffizientendeterminante eine Gleichung für die Eigenwerte darstellt. Mit einem aus n linear unabhängigen Funktionen bestehenden Näherungsansatz erhält man eine Gleichung n.Grades, für deren Wurzeln folgende Aussagen gelten:

I) Kreiselwirkung im Falle synchroner Präzession im Gegenlauf.

a) In denjenigen Fällen, in welchen sich die Funktionen des Näherungsansatzes nach den Eigenfunktionen des zugehörigen Eigenwertproblems entwickeln lassen, wurde unter Verwendung dieser Entwicklung mit Hilfe eines von H. Kneser abgeleiteten Satzes der Beweis erbracht, daß die n Wurzeln obere Schranken für die n ersten Eigenwerte darstellen und genauer sind als die mit dem gleichen Näherungsansatz berechneten entsprechenden Ritz-Galerkinschen Näherungen.

b) Für alle anderen Fälle wurde keine streng beweisbare Aussage gemacht. Für n = 2 hat sich bei der Durchrechnung verschiedener Beispiele gezeigt, daß auch hier die Wurzeln schärfere obere Schranken sind als die entsprechenden Ritz-Galerkin-Lösungen.

II) Kreiselwirkung im Falle synchroner Präzession im Gleichlauf.

Mit den in der Arbeit angegebenen Grundlagen der Eigenwert-Theorie ist keine allgemein gültige Aussage über die Wurzeln der Näherungsgleichung gefunden worden. Die bei mehreren Beispielen für $n = 2$ errechneten Näherungen liegen z.T. oberhalb, z.T. unterhalb der strengen Lösungen; ihre Abweichungen von letzteren sind dem Betrage nach kleiner als bei den entsprechenden Ritz-Galerkin-Lösungen.

Die vorstehend beschriebene Methode läßt sich unter Beachtung des physikalisch-technischen Sachverhaltes auf mehrfach gelagerte Wellen übertragen.

B) Strenge Lösung. Für Rotoren mit bereichsweise konstanten Scheibenradien läßt sich das Eigenwertproblem über die aus der Variationsgleichung gewonnenen Differentialgleichungen einschließlich Rand- und Übergangsbedingungen exakt auflösen. In der vorliegenden Arbeit erfolgt dies für die Dreifelderwelle und die Fünffelderwelle mit einer bezüglich der Wellenmitte symmetrischen Scheibenverteilung. Führt man die Lagerverbindungsgerade als x-Achse (Ursprung in einem Lager) ein, ist ℓ die Wellenlänge, so ist die Scheibenverteilung der ersteren gegeben durch $r(x) = r_1$ in 0 bis a (Feld 1), $r(x) = r_2$ in a bis b (Feld 2) und $r(x) = r_3$ in b bis ℓ (Feld 3) (r_i =konst. $\neq 0$). Für jedes dieser Felder liegt eine gewöhnliche Differentialgleichung 4.Ordnung vor; die Gesamtauslenkung der Welle setzt sich also aus mehreren Komponenten zusammen, wobei die erste bzw. letzte die Randbedingungen für das linke bzw. rechte Lager erfüllen muß und die Komponenten zweier nebeneinander liegender Felder durch die Übergangsbedingungen an den Feldgrenzen miteinander verknüpft werden. Diese Bedingungen führen zu einem linearen homogenen Gleichungssystem für die Integrationskonstanten, dessen verschwinden-

de Koeffizientendeterminante eine transzendente Gleichung für die Eigenwerte darstellt.

Bei dem hier untersuchten Typ der Fünffelderwelle kann man sich aus Symmetriegründen auf die Untersuchung der Wellenauslenkung im Bereich 0 bis $\ell/2$ beschränken. Durch Überlegungen geometrischer und dynamischer Art ergeben sich die Bedingungen, denen die Eigenfunktionen in der Wellenmitte genügen. Der hierbei auftretende Unterschied zwischen Eigenfunktionen gerader und ungerader Ordnung führt nach Ausführung der Rechnung zu je einer Gleichung für die Eigenwerte gerader und ungerader Ordnung.

Ist in einem oder mehreren Feldern r identisch Null, so ergibt sich die zugehörige Gleichung durch Grenzübergang aus der allgemeinsten Gleichung, die für nicht identisch verschwindendes r in 0 bis ℓ abgeleitet wurde.

Lebenslauf

Am 7.2.1924 wurde ich, Ludwig Eberhard Ulrich Fehrle, als Sohn des Chemikers Dr.rer. nat. Alfred Fehrle und seiner Frau Margarethe geb. Gutekunst in Frankfurt/Main-Höchst geboren. Von Ostern 193o bis 1934 besuchte ich die Volksschule in Bad-Soden am Taunus, anschließend daran bis September 1941 das Realgymnasium in Frankfurt/Main-Höchst, das ich mit dem Reifevermerk verließ. Vom 1.10.1941 bis Kriegsende gehörte ich der Kriegsmarine an und geriet bei der Kapitulation in englische Gefangenschaft, aus der ich am 7.6.1946 entlassen wurde.

Die Reifeprüfung legte ich nach Teilnahme an einem Sonderlehrgang am 7.12.1946 am Leibniz-Realgymnasium in Frankfurt/Main-Höchst ab.

Im Sommersemester 1947 begann ich das Studium, Hauptfach Mathematik, an der Universität in Frankfurt/Main. Dort legte ich am 4.11.1949 die Diplom-Vorprüfung, am 27.7.1951 die Diplom-Hauptprüfung für Mathematiker ab.

Die vorliegende Arbeit, deren Thema mir von Herrn Prof. Dr.-Ing. Karas, Technische Hochschule Darmstadt, gestellt wurde, begann ich im Oktober 1951 und beendete sie im Dezember 1953.

1.Referent: Prof. Dr.-Ing. K. Karas
2.Referent: Prof. Dr. R. Moufang

Tag der mündlichen Prüfung: 25.Februar 1955

54/224 x 1